

KARTA PRZEDMIOTU**I. Dane podstawowe**

Nazwa przedmiotu	Podstawy miary i całki Lebesgue'a
Nazwa przedmiotu w języku angielskim	Foundations of Lebesgue's measure and integral
Kierunek studiów	Matematyka
Poziom studiów (I, II, jednolite magisterskie)	I
Forma studiów (stacjonarne, niestacjonarne)	stacjonarne
Dyscyplina	Matematyka
Język wykładowy	polski

Koordinator przedmiotu/osoba odpowiedzialna	dr hab. August Zapała
---	-----------------------

Forma zajęć (<i>katalog zamknięty ze słownika</i>)	Liczba godzin	semestr	Punkty ECTS
wykład	30	3/5	5
konwersatorium			
ćwiczenia	30	3/5	
laboratorium			
warsztaty			
seminarium			
proseminarium			
lektorat			
praktyki			
zajęcia terenowe			
pracownia dyplomowa			
translatorium			
wizyta studyjna			

Wymagania wstępne	Wstęp do rachunku różniczkowego i całkowego, Analiza matematyczna I i II (ciągi i szeregi liczbowe, rachunek różniczkowy i całkowy funkcji jednej i wielu zmiennych) Wstęp do matematyki, Topologia przestrzeni metrycznych (podstawy teorii mnogości)
-------------------	---

II. Cele kształcenia dla przedmiotu

Poznanie podstaw ogólnej teorii miary.
Poznanie miary Lebesgue'a
Poznanie całki Lebesgue'a

III. Efekty uczenia się dla przedmiotu wraz z odniesieniem do efektów kierunkowych

Symbol	Opis efektu przedmiotowego	Odniesienie do efektu kierunkowego
WIEDZA		
W_01	Studenci rozumieją budowę teorii miary, poznają ogólną konstrukcję miary przy pomocy miary zewnętrznej	K_W03
W_02	Studenci poznają najważniejsze definicje i twierdzenia teorii miary i całki	K_W04
W_03	Studenci poznają konstrukcję miary Lebesgue'a i jej własności	K_W03, K_W04, K_W05
W_04	Studenci poznają konstrukcję całki względem dowolnej miary	K_W03, K_W04
UMIEJĘTNOŚCI		
U_01	Studenci umieją obliczać miarę Lebesgue'a różnych zbiorów	K_U01, K_U09
U_02	Studenci umieją obliczać całki Lebesgue'a różnych funkcji mierzalnych	K_U13
U_03	Studenci umieją stosować miarę i całkę Lebesgue'a w różnych zagadnieniach teoretycznych oraz praktycznych	K_U14
KOMPETENCJE SPOŁECZNE		
K_01	Studenci precyzyjnie formułują pytania służące pogłębieniu zrozumienia tematu oraz uzupełnieniu brakujących elementów rozumowania	K_K02

IV. Opis przedmiotu/ treści programowe

Pojęcia ciała i σ -ciała zbiorów. Ciała i σ -ciała generowane przez rodziny zbiorów. Lemat o istnieniu najmniejszego ciała i σ -ciała zbiorów generowanego przez daną rodzinę zbiorów.

Definicja miary. Ogólne własności miar (monotoniczność, skończoność i półskończoność, subaddytywność, graniczne wartości na monotonicznych ciągach zbiorów). Zbiory miary zero i twierdzenie o uzupełnianiu miary.

Warunek mierzalności oraz lemat Caratheodory'ego.

Miara zewnętrzna i twierdzenie Caratheodory'ego o wyznaczaniu miary poprzez miarę zewnętrzną.

Twierdzenie o rozszerzaniu miary z ciała na σ -ciało.

Miara zewnętrzna Lebesgue'a. Konstrukcja miary Lebesgue'a.

Związek miary Lebesgue'a z objętością zbiorów w przestrzeni euklidesowej.

Miara zewnętrzna metryczna w przestrzeni metrycznej i mierzalność zbiorów borelowskich.

Mierzalność zbiorów borelowskich w sensie Lebesgue'a. Zbiór Cantora i twierdzenie o istnieniu zbiorów nieborelowskich mierzalnych w sensie Lebesgue'a.

Warunki de la Vallée-Poussina mierzalności zbiorów w sensie Lebesgue'a.

Przesuwalność miary zewnętrznej Lebesgue'a i miary Lebesgue'a.

Konstrukcja zbioru niemierzalnego w sensie Lebesgue'a.

Pojęcie mierzalności funkcji względem σ -ciała zbiorów.

Mierzalność funkcji otrzymanych w wyniku różnych operacji algebraicznych na funkcjach mierzalnych. Ciągi funkcji mierzalnych, mierzalność supremum, infimum i granic ciągów funkcyjnych.

Podstawowe własności funkcji prostych związane z mierzalnością. Twierdzenie o aproksymacji funkcji mierzalnych funkcjami prostymi.

Całkowanie funkcji prostych. Własności całki funkcji prostych (dodatniość, dodatnia jednorodność, liniowość, monotoniczność, addytywność całki jako funkcji zbioru).

Dwa podstawowe lematy o całkowaniu ciągów funkcji prostych. Konstrukcja całki Lebesgue'a.

Najważniejsze własności całki Lebesgue'a (równość całek funkcji równych p.w., nieujemność na funkcjach nieujemnych, znikanie na funkcjach zerowych i zbiorach miary zero, jednorodność, liniowość, monotoniczność operacji całkowania, skończoność p.w. funkcji całkowlanej, addytywność całki jako funkcji zbioru, równość całek na zbiorach różniących się o zbiór miary zero, monotoniczność całki funkcji nieujemnej jako funkcji zbioru, twierdzenie o wartości średniej).
 Kryteria całkowlalności funkcji w sensie Lebesgue'a.
 Zbieżność prawie wszędzie i jej podstawowe własności.
 Zbieżność według miary i jej podstawowe własności.
 Związki między różnymi rodzajami zbieżności.
 Twierdzenie Beppo-Levi. Twierdzenie Lebesgue'a o całkowaniu ciągów monotonicznych i twierdzenia o całkowaniu szeregów funkcyjnych. Lemat Fatou.
 Twierdzenia Lebesgue'a o zmajoryzowanym przejściu do granicy pod znakiem całki.
 Informacje na temat przestrzeni funkcji całkowlalnych.

V. Metody realizacji i weryfikacji efektów uczenia się

Symbol efektu	Metody dydaktyczne (lista wyboru)	Metody weryfikacji (lista wyboru)	Sposoby dokumentacji (lista wyboru)
WIEDZA			
W_01	Wykład konwencjonalny	Kolokwium / Test / Sprawdzian pisemny Egzamin / Zaliczenie pisemne	Oceniony tekst pracy pisemnej
W_02	Wykład konwencjonalny	Kolokwium / Test / Sprawdzian pisemny Egzamin / Zaliczenie pisemne	Oceniony tekst pracy pisemnej
W_03	Wykład konwencjonalny	Kolokwium / Test / Sprawdzian pisemny Egzamin / Zaliczenie pisemne	Oceniony tekst pracy pisemnej
W_04	Wykład konwencjonalny	Kolokwium / Test / Sprawdzian pisemny Egzamin / Zaliczenie pisemne	Oceniony tekst pracy pisemnej
UMIEJĘTNOŚCI			
U_01	Ćwiczenia laboratoryjne	Kolokwium / Test / Sprawdzian pisemny	Oceniony tekst pracy pisemnej
U_02	Ćwiczenia laboratoryjne	Kolokwium / Test / Sprawdzian pisemny	Oceniony tekst pracy pisemnej
U_03	Ćwiczenia laboratoryjne	Kolokwium / Test / Sprawdzian pisemny	Oceniony tekst pracy pisemnej
KOMPETENCJE SPOŁECZNE			
K_01	Metoda problemowa	Kolokwium / Test / Sprawdzian pisemny	Oceniony tekst pracy pisemnej

VI. Kryteria oceny, wagi.

W ramach ćwiczeń 2 kolokwia pisemne (po 5 zadań na każdym kolokwium, w tym 3 zadania z problemami do rozwiązania i 2 pytania teoretyczne, każde zadanie punktowane w skali 0-10 pkt. w sumie 100 pkt.), kolokwium poprawkowe

W celu uzyskania zaliczenia ćwiczeń należy zaliczyć jedno z 2 kolokwiów, uzyskując minimum 50%

pkt., lub kolokwium poprawkowe

Egzamin pisemny składa się z dwóch części: praktycznej (60%) – polegającej na weryfikacji umiejętności zastosowania w praktyce wiedzy zdobytej na wykładzie oraz ćwiczeniach, teoretycznej (40%) – sprawdzającej wiedzę teoretyczną zdobytą na wykładzie.

Szczegółowe kryteria są podane studentom z każdą edycją przedmiotu.

VII. Obciążenie pracą studenta

Forma aktywności studenta	Liczba godzin
Liczba godzin kontaktowych z nauczycielem	90
Liczba godzin indywidualnej pracy studenta	60

VIII. Literatura

Literatura podstawowa
R. Sikorski, Funkcje rzeczywiste, t. I, PWN 1958
S. Łojasiewicz, Wstęp do teorii funkcji rzeczywistych, PWN 1976
R. L. Schilling, Measures, Integrals and Martingales, Cambridge 2005
Literatura uzupełniająca
J. Niewiarowski, Zadania z teorii miary